UD0 – LEZIONE A

LE EQUAZIONI DELLA NATURA

a. Le basi matematiche della biologia

Che cosa hanno in comune il manto di un leopardo, il cavolo romanesco, e la corolla di un fiore? Ben poco, se non presentassero tutti pattern la cui formazione è frutto dell'interazione di componenti, i *morfogeni*, secondo leggi matematiche descritte sessanta anni fa da Alan Turing.

I pattern in natura sono osservati da sempre, e non è stato certo Turing il primo a riconoscere modelli matematici e schemi geometrici, per esempio, nella fillotassi delle piante. Era già passato mezzo millennio dagli studi di geometria di Leonardo da Vinci sulle piante[1] e sembrava che D'Arcy Thompson Wentworth avesse quasi esaurito, con il suo libro *On growth and form*[2] (in italiano *Su crescita e forma*) del 1917, quanto di matematico si potesse osservare sulla *morfogenesi*, che è il processo biologico della creazione delle forme negli organismi viventi.

Il termine morfogenesi deriva infatti dalle parole greche *morphe* (che significa *forma*) e *genesi* (termine che ha lo stesso significato che in italiano), e indica il procedimento durante il quale un organismo sviluppa la sua conformazione. Nella biologia dello sviluppo, la morfogenesi è uno dei tre aspetti fondamentali, assieme alla crescita delle cellule e alla loro differenziazione, ed è quello che controlla la disposizione delle cellule nello spazio durante lo sviluppo dell'organismo.

b. Numeri ricorrenti in natura

Tra gli 'oggetti matematici' che più ricorrono osservati in natura, e che più hanno suscitato interesse, c'è la serie di Fibonacci. Essa prende il nome dal matematico pisano Leonardo Fibonacci che la definì nel XIII secolo. Si tratta di una serie

---

[1] Manoscritto di Leonardo da Vinci visibile on-line alla pagina http://brunelleschi.imss.fi.it/genscheda.asp?appl=LIR&xsl=paginamanoscritto&chiave=101407.

[2] D'Arcy Wentworth Thompson, *On growth and form*, Cambridge University Press, Cambridge, 1917.

infinita di numeri Fib(0), Fib(1), …, Fib(n), … nella quale per ogni intero i>=0, il valore di Fib(i) indica l'i-esimo elemento della sequenza, e ciascuno di questi numeri è la somma dei due precedenti.
Essendo i primi due valori definiti come Fib(0)=0 e Fib(1)=1, la serie di Fibonacci è dunque 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…e cresce molto velocemente. Di essa sono note moltissime proprietà interessanti ed è da secoli oggetto di studio dei matematici. Fibonacci la ricavò nel tentativo di definire la discendenza dei conigli in un modello teorico del loro (elevato) tasso di riproduzione. Neppure lo stesso Fibonacci poteva immaginare in quanti fenomeni naturali (peraltro ben più reali del suo buffo modello di riproduzione dei conigli) i suoi numeri sarebbero stati osservati, anche a distanza di centinaia di anni. Per esempio, il numero dei petali di un fiore è molto spesso un numero di Fibonacci, per quanto questo possa variare al variare delle dimensioni e del tipo di fiore. È storicamente noto che Alan Turing fosse particolarmente intrigato dall'osservazione (che non fu lui il primo a fare) della ricorrenza dei numeri di Fibonacci nella disposizione dei pistilli sulle corolle dei girasoli. Essi sono posti lungo due insiemi di spirali che si intrecciano: in uno, queste girano in senso orario, e nell'altro in senso antiorario. Nonostante un'apparente simmetria, il numero di spirali in ciascun insieme non è mai lo stesso, ma la cosa sorprendente è che comunque si tratta di numeri di Fibonacci. Più precisamente, e ancor più sorprendentemente, i due numeri corrispondenti alle quantità di spirali nei due insiemi sono due numeri di Fibonacci consecutivi. Tipicamente, per esempio, le spirali che si sviluppano in senso orario sono trentaquattro, mentre quelle in senso antiorario sono cinquantacinque. Strutture a spirali intrecciate simili, con ancora i numeri di Fibonacci come protagonisti, si possono notare nelle scaglie della buccia dell'ananas, in quelle delle pigne, e in generale in svariati organismi vegetali e animali (tra questi ultimi, ad esempio, le conchiglie di alcuni molluschi).

c. Morfogenesi e studio dei pattern

La curiosità di Alan Turing per i pattern osservabili in natura non si limitava comunque alle spirali, bensì si estendeva alle strisce, ai pattern esagonali (molto

frequenti in natura animale), ai cerchi concentrici, al manto di animali pezzati, nonché a molte altre forme meno apparentemente regolari.
Gli studi di Turing sulla morfogenesi trovarono senza dubbio ispirazione e motivazione in queste osservazioni che lo avevano tanto affascinato. Innanzitutto, come suggerisce il titolo del suo lavoro (tradotto in italiano, *Le basi chimiche della morfogenesi*), sposta l'attenzione dalla meccanica e dai meccanismi della morfogenesi, alla chimica delle sue componenti. Queste, che egli chiama i *morfogeni*, sono gli agenti di un vero e proprio sistema nel quale essi co-operano per il meccanismo della morfogenesi. I morfogeni, appunto, sono molecole che diffondono, e dunque propagano, un segnale che controlla la differenziazione delle cellule con modalità che dipendono dalla concentrazione dei morfogeni stessi. Per la fluttuazione di queste quantità chimiche, Turing esibisce precisi modelli matematici e ne applica le relative leggi. E anche il modello matematico da lui proposto è di per sé una novità per la teoria della morfogenesi: un sistema continuo di equazioni differenziali che rappresenta dinamiche non lineari. Con tale modello, Alan Turing riesce a catturare la sua geniale intuizione che i pattern osservabili in natura, con la loro simultanea ripetitività e variabilità, siano frutto di un'interazione di sostanze chimiche le cui concentrazioni hanno iterati effetti reciproci. Tali effetti sono, a ciascuna iterazione, simili qualitativamente e, al tempo stesso, leggermente diversi quantitativamente, dando conseguentemente luogo alla formazione dei pattern.

Turing descrive il suo sistema come un modello che opera tramite *azione*, *reazione* e *diffusione.* Tale sistema parte da una conformazione determinata dalle quantità delle componenti chimiche nello stato iniziale e poi evolve variando le quantità stesse secondo leggi matematiche. Nell'ambito di queste fluttuazioni si possono raggiungere vari tipi di equilibri stabili del sistema, dove la stabilità è frutto di una sostanziale simmetria; la rottura di questa simmetria è ciò che causa la transizione (continua, non discreta) da uno stato stabile all'altro. La varietà delle irregolarità che rompono la simmetria, osserva Turing, è enorme e di difficile investigazione; fortunatamente, invece, la varietà degli stati di equilibrio che possono essere raggiunti è limitata: sono solo sei, e Turing nel suo lavoro li analizza tutti, fornendo ipotesi sul tipo di morfogenesi cui ciascuno di essi può dare eventualmente luogo.

Adattato da Nadia Pisani e Giuseppe Longo, *Le equazioni della natura* in “Sapere”, Agosto 2012, pp. 28-31